第26卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 5
2009年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0836-09

Panel数据模型中回归系数的广义p值检验*

程 靖[1,2], 王松桂[3], 岳荣先[1]

(1- 上海师范大学数理信息学院，上海 200234; 2- 巢湖学院数学系，安徽 238000;
3- 北京工业大学应用数理学院，北京 100022)

摘 要: 利用广义p值和广义置信区域的概念对含有三个随机效应的Panel数据模型中回归系数的假设检验问题建立了精确检验，构造了回归系数的几个广义置信区域；讨论了本文所构造的检验和置信区域在尺度变换下的不变性；对这几种检验的功效和置信区域的覆盖率给出了数值模拟结果。

关键词: Panel数据模型；随机效应；广义p值；广义置信区域；回归系数

分类号: **AMS**(2000) 62J10 **中图分类号**: O212.1 **文献标识码**: A

1 引言

Panel数据模型本质上是一类具有套误差结构(nested error structure)的线性回归模型，广泛应用于计量经济学等领域，该类模型的研究不仅受到经济学家也受到了统计学家的广泛关注，近年来有不少这方面的研究成果发表。Panel数据模型回归系数的广义最小二乘F检验(文献中记作$F_{GLS}(\rho)$)中含有未知参数，Rao等[1]对参数进行估计并给出一种可行性F检验；有些文献中则忽略群内相关性采用标准的最小二乘F检验F_s；Wu等[2]对F_s进行修正给出一种新的检验$F_A(\rho)$。这些方法都采用了F检验，但都不是精确检验，Wang和Liski[3]对它们功效分别进行了研究。Wang和Ma[4]还对此模型提出了两个精确的F检验F_B和F_W，并利用F_B和F_W构造出一个检验。

本文将基于广义p值检验理论方法给出回归系数的几个新的精确检验和置信区域，并通过对功效和置信区域覆盖率的模拟对它们进行比较。广义p值检验最初是为了解决单边假设检验中由于冗余参数存在而无法获得精确检验的问题而提出的。Tsui 和 Weerahandi[5]和 Weerahandi[6]分别提出了广义p值(generalized p value)和广义置信区间(generalized confidence interval)的概念。实际应用表明在精确F检验不存在或冗余参数存在时，基于广义p值和广义置信区间来获得精确检验和置信区间的方法是富有成效的，文献中已有不少研究成果[5-14]。Weerahandi[7]分别对单向分类模型方差分量的单边假设和多向分类模型中方差分量的单边假设问题给出了基于广义p值的精确检验。Zhou和Mathew[8]把这种方法应用到混合效应模型中，分别对单个方差分量的显著性和和两个独立平衡模型方差分量的比较建立了精确检验，并把部分结果推广到非平衡情况。Weerahandi和Berger[9]，Chi和Weerahandi[10]利用广义p值对协方差具有组内相关结构的简单生长曲线模型中回归系数建立了精确检验，Lin和Lee[11]将他们的结果推广到具有等相关结构的简单生长曲线模型。Ye和Wang[12]对平衡数据下一般随机效应模型的单个方差分量构造出精确检验和置信区间，并将结论推广至两个独立平衡模型方差分量的比较。Tsui和Weerahandi[5]还讨论了广义p值检验的不变

收稿日期: 2007-12-18. **作者简介**: 程靖(1979年10月生)，女，博士，讲师. 研究方向：线性模型与最优设计.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10671129)；教育部高校博士点专项基金(20060270002).

性。Weerahandi[6,13] 构造了不同指数族均值差异性的广义置信区间，并构造了混合模型方差分量差异的广义置信区间。Krishnamoorthy 和 Mathew[14] 利用广义枢轴量对对数正态分布的均值建立了置信区间。有一些文献[15,16] 是对广义 p 值方法进行探讨。

2 广义 p 值和广义置信区间

设 Z 为分布依赖于参数 (η,δ) 的随机变量，其中 η 为检验参数。δ 为冗余参数，且 δ 可以为参数向量。假设要检验的问题是

$$H_0:\eta\le\eta_0\longleftrightarrow H_1:\eta>\eta_0, \tag{1}$$

这里 η_0 为预先给定的值。记 z 为 Z 的观测值。

定义 1 设 $T_1(Z,z,\eta,\delta)$ 为随机变量 Z，Z 的观测值 z，及参数 (η,δ) 的函数。若 T_1 满足

1) $T_1(Z,z,\eta_0,\delta)$ 的分布与冗余参数无关；

2) $T_1(Z,z,\eta,\delta)$ 的观测值 $T_1(z,z,\eta,\delta)$ 与未知参数无关；

3) 对于固定的 z 和 δ，$T_1(Z,z,\eta,\delta)$ 的分布关于 η 随机单调增或随机单调减，

则称 $T_1(Z,z,\eta,\delta)$ 为一个广义检验变量。

当 $T_1(Z,z,\eta,\delta)$ 的分布关于 η 随机单调增时，对于检验问题 (1) 定义广义 p 值为

$$p=Pr\big(T_1(Z,z,\eta,\delta)\ge T_1(z,z,\eta,\delta)\mid\eta=\eta_0\big).$$

当 $T_1(Z,z,\eta,\delta)$ 的分布关于 η 随机单调减时，对于检验问题 (1) 定义广义 p 值为

$$p=Pr\big(T_1(Z,z,\eta,\delta)\le T_1(z,z,\eta,\delta)\mid\eta=\eta_0\big).$$

对于给定水平 α，如果 $p\ge\alpha$ 则接受原假设，反之拒绝。由条件 1),2) 可知，广义 p 值与任何未知参数无关，所以是可以计算的。

定义 2 设 $T_2(Z,z,\eta,\delta)$ 为随机变量 Z，Z 的观测值 z，及参数 (η,δ) 的函数。若 T_2 满足

1) $T_2(Z,z,\eta,\delta)$ 的分布与未知参数无关；

2) $T_2(Z,z,\eta,\delta)$ 的观测值 $T_2(z,z,\eta,\delta)$ 与冗余参数无关，

则称 $T_2(Z,z,\eta,\delta)$ 为一个广义枢轴量。

对于感兴趣参数的广义置信区间可以利用 $T_2(Z,z,\eta,\delta)$ 来构造。例如，当 $T_2(z,z,\eta,\delta)=\eta$ 时，若 $T_2(1-\alpha)$ 表示 $T_2(Z,z,\eta,\delta)$ 的 $1-\alpha$ 分位数，则 $T_2(1-\alpha)$ 就成为 η 的广义置信上限。广义置信下限和双边置信限类似可得。详细讨论参见 Tusi 和 Weerahandi[5]，Weerahandi[6]。

3 模型分析

本文考虑含有三个随机效应的 Panel 数据模型

$$y_{it}=\beta_0+x_{it1}\beta_1+\cdots+x_{itk}\beta_k+\mu_i+\lambda_t+\varepsilon_{it},\quad i=1,\cdots,N;\quad t=1,\cdots,T. \tag{2}$$

这里 y_{it} 表示第 i 个个体在时刻 t 因变量的观测值；x_{itj} 表示第 i 个个体上第 j 个自变量在时刻 t 的取值；$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_k)'$ 为未知回归系数；μ_i 为第 i 个个体效应，假定这 N 个个体是从一个大的总体中随机抽取的，μ_i 是随机的；λ_t 表示时刻 t 的时间效应，也视为随机

的；ε_{it} 为随机误差。假定所有 μ_i, λ_t 和 ε_{it} 都彼此独立，且 $\mu_i \sim N(0,\sigma_\mu^2)$, $\lambda_t \sim N(0,\sigma_\lambda^2)$, $\varepsilon_{it} \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2)$。(2) 可记为

$$y = \mathbf{1}_{NT}\beta_0 + X\beta + u, \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned}
&y = \big(y_{11}, \cdots, y_{1T}, y_{21}, \cdots, y_{2T}, \cdots, y_{N1}, \cdots, y_{NT}\big)',\\
&X = \big(x_{11}, \cdots, x_{1T}, x_{21}, \cdots, x_{2T}, \cdots, x_{N1}, \cdots, x_{NT}\big)',\\
&x'_{it} = \big(x_{it1}, x_{it2}, \cdots, x_{itk}\big),\\
&u = \big(I_N \otimes \mathbf{1}_T\big)\mu + \big(\mathbf{1}_N \otimes I_T\big)\lambda + \varepsilon; \quad \mu = \big(\mu_1, \cdots, \mu_N\big)',\\
&\lambda = \big(\lambda_1, \cdots, \lambda_T\big)'; \quad \varepsilon = \big(\varepsilon_{11}, \cdots, \varepsilon_{1T}, \cdots, \varepsilon_{N1}, \cdots, \varepsilon_{NT}\big)'.
\end{aligned}$$

则有

$$\Sigma = \mathrm{Cov}(u) = \sigma_\mu^2\big(I_N \otimes J_T\big) + \sigma_\lambda^2\big(J_N \otimes I_T\big) + \sigma_\varepsilon^2 I_{NT},$$

其中

$$J_T = \mathbf{1}_T\mathbf{1}'_T, \quad J_N = \mathbf{1}_N\mathbf{1}'_N, \quad I_{NT} = I_N \otimes I_T.$$

记

$$\bar{J}_T = J_T/T, \quad \bar{J}_N = J_N/N, \quad E_N = I_N - \bar{J}_N, \quad E_T = I_T - \bar{J}_T,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(u) &= \sigma_\varepsilon^2\big(E_N \otimes E_T\big) + \big(T\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2\big)\big(E_N \otimes \bar{J}_T\big) + \big(N\sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2\big)\big(\bar{J}_N \otimes E_T\big)\\
&\quad + \big(N\sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2\big)\big(\bar{J}_N \otimes E_T\big)\\
&\triangleq \sigma_1^2 Q_1 + \sigma_2^2 Q_2 + \sigma_3^2 Q_3 + \sigma_4^2 Q_4,
\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\sigma_1^2 = \sigma_\varepsilon^2, \quad \sigma_2^2 = T\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2, \quad \sigma_3^2 = N\sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2, \quad \sigma_4^2 = T\sigma_\mu^2 + N\sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2,$$

$$Q_1 = E_N \otimes E_T, \quad Q_2 = E_N \otimes \bar{J}_T, \quad Q_3 = \bar{J}_N \otimes E_T, \quad Q_4 = \bar{J}_N \otimes \bar{J}_T.$$

引理1 1) Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 为对称幂等阵；

2) Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 两两相互正交；

3) Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 的秩分别为 $(N-1)(T-1)$, $N-1$, $T-1,1$。

该引理可依据王松桂等[17] 中相关结论加以证明。分别用 Q_1, Q_2, Q_3 左乘原模型，可得

$$\left\{\begin{aligned}
y_1 &= Q_1 y = Q_1 X\beta + Q_1 u \triangleq Q_1 X\beta + u_1,\\
y_2 &= Q_2 y = Q_2 X\beta + Q_2 u \triangleq Q_1 X\beta + u_2,\\
y_1 &= Q_3 y = Q_3 X\beta + Q_3 u \triangleq Q_3 X\beta + u_3,
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

其中 $Eu_i = Q_i Eu = 0$, $\mathrm{Cov}(u_i) = \sigma_i^2 Q_i$, $i = 1,2,3$。假定 $(X'Q_iX)^{-1}$, $i=1,2,3$ 均存在，这在实际数据观测中是容易满足的。(5) 各子模型中可得到 β 的最小二乘估计为

$$\hat{\beta}_i = (X'Q_iX)^{-1}X'Q_iy, \quad i = 1,2,3.$$

由最小二乘统一理论知 $\hat{\beta}_i$ 分别为上述三个模型中 β 的最佳线性无偏估计，且

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_i) = \sigma_i^2 (X'Q_iX)^{-1} \triangleq \Sigma_i(\sigma_i^2), \quad i = 1, 2, 3.$$

利用残差估计 $\hat{u}_i = Q_i y - Q_i X\hat{\beta}_i$，得到 σ_i^2 的无偏估计

$$\hat{\sigma_i}^2 = S_i^2 = \frac{\hat{u}_i'\hat{u}_i}{n_i} = \frac{y'\big(Q_i - Q_iX(X'Q_iX)^{-1}X'Q_i\big)y}{n_i}. \tag{6}$$

其中 $n_i = rk(Q_i) - k$，且有

$$V_i = \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \mathcal{X}_{n_i}^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

利用王松桂等[17] 中相关结论可得。

引理 2 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, S_1^2, S_2^2, S_3^2$ 相互独立。

下面将利用本节获得的优良估计来构造回归系数的精确检验和置信区域。

4 回归系数的精确检验和置信区间

对于回归系数的齐次假设检验问题，本节将提出几个基于广义 p 值方法的新的精确检验，并且这些检验还具有良好的统计性质。考虑假设问题

$$H_0 : H\beta = 0 \longleftrightarrow H_1 : H\beta \neq 0, \tag{7}$$

这里 H 是 $m \times k$ 矩阵，其秩为 m。沿用上一节的估计及记号，由前面的分析易得出

$$\hat{\beta}_i \sim N(\beta, \Sigma_i(\sigma_i^2)), \quad \Sigma_i(\sigma_i^2) = \sigma_i^2(X'Q_iX)^{-1}, \quad H\hat{\beta}_i \sim N(H\beta, H(\Sigma_i(\sigma_i^2))H'), \quad i = 1, 2, 3.$$

记 s_i^2 为 S_i^2, $i = 1, 2, 3$ 观测值，定义

$$\begin{aligned} T_i &= (H\hat{\beta}_i)'\big[H(\Sigma_i(\sigma_i^2))H'\big]^{-1}(H\hat{\beta}_i) - (Hb_i)'\big[H(\Sigma_i(\sigma_i^2 s_i^2 S_i^{-2}))H'\big]^{-1}(Hb_i), \\ &= \Lambda_i - (Hb_i)'\big[H(\Sigma_i(n_i s_i^2 V_i^{-1}))H'\big]^{-1}(Hb_i), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{8}$$

这里，$b_i = (b_{i1}, \cdots, b_{ik})'$ 为 $\hat{\beta}_i$ 的观测值。易见

1) $H\beta = 0$ 时，$\Lambda_i = (H\hat{\beta}_i)'[H(\Sigma_i(\sigma_i^2))H']^{-1}(H\hat{\beta}_i) \sim \mathcal{X}_m^2$，又 $\hat{\beta}_i, V_i = \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \mathcal{X}_{n_i}^2$ 相互独立，故 T_i 的分布与冗余参数无关；

2) T_i 的观测值 $t_i = 0$ 与未知参数无关；

3) 又 T_i 为 $H\hat{\beta}_i$ 的正定二次型，故其在备择假设下的取值要大于原假设下取值。

因此，(8) 对假设检验问题 (7) 定义了三个广义检验变量，据此得到广义 p 值

$$\begin{aligned} p_i &= Pr\big(T_i \geq 0 \mid H\beta = 0\big) \\ &= Pr\big(\Lambda_i \geq (Hb_i)'\big[H(\Sigma_i(n_i s_1^2 V_i^{-1}))H'\big]^{-1}(Hb_i)\big) \\ &= 1 - E_{V_i}\big\{F_{\mathcal{X}_m^2}\big[(Hb_i)'[H(\Sigma_i(n_i s_i^2 V_i^{-1}))H']^{-1}(Hb_i)\big]\big\}, \end{aligned} \tag{9}$$

式中 $F_{\mathcal{X}_m^2}(\cdot)$ 表示 $\mathcal{X}_m^2$ 的分布函数，E_{V_i} 表对 V_i 求期望，$i = 1, 2, 3$。

考虑尺度变换

$$(\beta,\sigma_i)\longrightarrow(a\beta,a\sigma_i),\quad(\hat{\beta}_i,S_i)\longrightarrow(a\hat{\beta}_i,aS_i),\quad(a>0).\tag{10}$$

可以看出，在尺度变换 (10) 下检验问题 (7) 本身和基于估计量 $\hat{\beta}_i$, S_i^2 的广义检验变量 T_i 均保持不变，故尺度变换 (10) 下假设检验问题 (7) 基于广义检验变量 T_i, $i=1,2,3$ 的广义 p 值检验是不变检验。由于 p_i $(i=1,2,3)$ 定义的广义 p 值为度量假设问题 (7) 中原假设正确与否的标准，即如果广义 p 值小于预先给定的水平 α，则基于广义 p 值的检验方法就会拒绝原假设，反之接受。如果 $p_i<\alpha$，这说明从现有数据来看不能接受原假设，此时自然希望能够构造出 $H\beta$ 的不变置信域。进一步定义

$$\tilde{T}_i=(H\hat{\beta}_i-H\beta)'\big[H(\Sigma_i(s_i^{-2}S_i^2))H'\big]^{-1}(H\hat{\beta}_i-H\beta),\quad i=1,2,3.\tag{11}$$

由于

$$\begin{aligned}&(H\hat{\beta}_i-H\beta)'\big[H(\Sigma_i(s_i^{-2}S_i^2))H'\big]^{-1}(H\hat{\beta}_i-H\beta)\\=\ &(H\hat{\beta}_i-H\beta)'\big[H(\Sigma_i(\sigma_i^2))H'\big]^{-1}(H\hat{\beta}_i-H\beta)\cdot n_is_i^2V_i^{-1},\end{aligned}$$

其中

$$(H\hat{\beta}_i-H\beta)'\big[H(\Sigma_i(\sigma_i^2))H'\big]^{-1}(H\hat{\beta}_i-H\beta)\sim\mathcal{X}_m^2,\quad V_i=\frac{n_iS_i^2}{\sigma_i^2}\sim\mathcal{X}_{n_i}^2$$

且相互独立，可知 $\tilde{T}_i$ 的分布与未知参数无关，而 $\tilde{T}_i$ 的观测值

$$\tilde{t}_i=(Hb_i-H\beta)'\big[H(X'Q_iX)^{-1}H'\big]^{-1}(Hb_i-H\beta)$$

与冗余参数无关，故 (11) 定义了三个广义枢轴量，并且在尺度变换 (10) 下保持不变，可由此来构造 $H\beta$ 的广义不变置信域。

对于非齐次线性假设检验问题

$$H_0:H\beta=d\longleftrightarrow H_1:H\beta\neq d$$

这里 H 定义同 (8)，且 $H\beta=d$ 相容。由于

$$E(H\hat{\beta}_i-d)=H\beta-d,\quad \mathrm{Cov}(H\hat{\beta}_i-d)=\mathrm{Cov}(H\hat{\beta}_i),\quad i=1,2,3.$$

利用 (8) 的有关结果，可以构造广义检验变量

$$T_i^\star=(H\hat{\beta}_i-d)'\big[H(\Sigma_i(\sigma_i^2))H'\big]^{-1}(H\hat{\beta}_i-d)-(Hb_i-d)'\big[H(\Sigma_i(\sigma_i^2s_i^2S_i^{-2}))H'\big]^{-1}(Hb_i-d).$$

进而得到相应的广义 p 值计算式

$$p_i^\star=1-E_{V_i}\big\{F_{\mathcal{X}_m^2}\big[(Hb_i-d)'\big[H(\Sigma_i(n_is_i^2V_i^{-1}))H'\big]^{-1}(Hb_i-d)\big]\big\},\quad i=1,2,3.$$

其中各符号含义同 (9)。这里对于 $H\beta$ 置信域可同样由 (11) 获得。

有很多实际问题可以归结为单个回系数的假设检验问题，下面考虑单个回归系数的单边假设问题的精确检验。记 $\beta_{(j)}$ 为 β 的的第 j 个分量 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$，考虑假设问题

$$H_0:\beta_{(j)}\leq\beta_{(j)}^0\longleftrightarrow H_1:\beta_{(j)}>\beta_{(j)}^0\tag{12}$$

其中 $\beta^0_{(j)}$ 为一预先给定值。

对于假设检验问题 (12)，定义

$$\begin{aligned} T_{i(j)} &= \frac{\hat{\beta}_{i(j)}-\beta_{(j)}}{\sqrt{(\Sigma_i(\sigma_i^2))_{jj}}} - \frac{b_{i(j)}-\beta_{(j)}}{\sqrt{(\Sigma_i(\sigma_i^2 s_i^2 S_i^{-2}))_{jj}}} \\ &= Z_i - \frac{b_{i(j)}-\beta_{(j)}}{\sqrt{(\Sigma_i(n_i s_i^2 V_i^{-1}))_{jj}}}, \quad i=1,2,3, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\hat{\beta}_{i(j)}$ 表示 $\hat{\beta}_i$ 的第 j 个分量，$b_{i(j)}$ 为 $\hat{\beta}_{i(j)}$ 观测值，$(\Sigma_i(\sigma_i^2))_{jj}$ 表示 $\Sigma_i(\sigma_i^2)$ 的第 (j,j) 元素。

$$Z_i = (\hat{\beta}_{i(j)}-\beta_{(j)})/(\sqrt{(\Sigma_i(\sigma_i^2))_{jj}}) \sim N(0,1), \quad V_i \sim \mathcal{X}^2_{n_i}, \quad i=1,2,3$$

且相互独立。可验证 $T_{i(j)}$ 为广义检验变量。用 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布的分布函数，得广义 p 值计算式

$$\begin{aligned} p_{i(j)} &= Pr\big(T_{i(j)} \geq t_{i(j)} \mid \beta_{(j)} = \beta^0_{(j)}\big) \\ &= Pr\Big(Z_i \geq \frac{b_{i(j)}-\beta^0_{(j)}}{\sqrt{(\Sigma_i(n_i s_i^2 V_i^{-1}))_{jj}}}\Big) \\ &= 1 - E_{V_i}\Big\{\Phi\Big[\frac{b_{i(j)}-\beta^0_{(j)}}{\sqrt{(\Sigma_i(n_i s_i^2 V_i^{-1}))_{jj}}}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{14}$$

在尺度变换 (10) 下，虽然基于统计量 $\hat{\beta}_i$, S_i^2 的广义检验变量 $T_{i(j)}$ 保持不变，但对假设检验问题 (12) 本身的参数空间发生了变化，所以假设检验问题本身就不是尺度变换下的不变检验问题。考虑与之等价的假设检验问题

$$H_0: \theta_{(j)} = \frac{\beta_{(j)}}{s_1} \leq \theta^0_{(j)} = \frac{\beta^0_{(j)}}{s_1} \longleftrightarrow H_1: \theta_{(j)} > \theta^0_{(j)}. \tag{15}$$

对假设检验问题 (15)，定义

$$\tilde{T}_{i(j)} = \frac{\hat{\beta}_{i(j)}-\beta_{(j)}}{\sqrt{(\Sigma_i(\sigma_i^2))_{jj}}} - \frac{\frac{b_{i(j)}}{s_1}-\theta_{(j)}}{\sqrt{(\Sigma_i(\sigma_i^2 s_i^2 s_1^{-2} S_i^{-2}))_{jj}}}, \quad i=1,2,3. \tag{16}$$

容易验证对假设检验问题 (15)，$\tilde{T}_{i(j)}$，$i=1,2,3$ 为广义检验变量。得到广义 p 值计算公式

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i(j)} &= Pr\big(\tilde{T}_{1(j)} \geq \tilde{t}_{1(j)} \mid \theta_{1(j)} = \theta^0_{(j)}\big) \\ &= 1 - E_{V_i}\Big\{\Phi\Big(\frac{\frac{b_{i(j)}}{s_1}-\theta^0_{i(j)}}{\sqrt{(\Sigma_i(n_1 s_i^2 s_1^{-2} V^{-1}))_{jj}}}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

对于相应的尺度变换

$$(\theta_{(j)},\sigma_i) \longrightarrow (\theta_{(j)},a\sigma_i), \quad (\hat{\beta}_{i(j)},S_i) \longrightarrow (a\hat{\beta}_{i(j)},aS_i), \quad (a>0).$$

在此尺度变换下，检验问题(15)和广义检验变量(16)均保持不变，因而基于$\tilde{T}_{i(j)}$的广义p值检验为尺度变换下假设检验问题(15)的不变检验。为了构造关于$\beta_{(j)}$的不变置信区间，考虑尺度不变参数$\theta_{(j)} = \beta_{(j)}/s_1$的不变置信区间。定义

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{\star}_{i(j)} &= \Big(\frac{\hat{\beta}_{i(j)}}{s_1} - \theta_{(j)}\Big)\sqrt{\frac{(\Sigma_i(\sigma_i^2 s_i^2 S_i^{-2}))_{jj}}{(\Sigma_i(\sigma_i^2))_{jj}}} \\ &= Z_i\sqrt{(\Sigma_i(n_i s_i^2 s_1^{-2} V_i^{-1}))_{jj}}\ ,\end{aligned}$$

这里Z_i同前，且$Z_i \sim N(0,1)$。容易验证$\tilde{T}^{\star}_{i(j)}$为广义枢轴量，且在尺度变换下保持不变。于是可以利用$\tilde{T}^{\star}_{i(j)}$的分位数来构造参数$\{\theta_{(j)}\}$的不变置信区间。

5 模拟结果和模拟方法

本节首先给出对假设问题$H_0 : H\beta = d \longleftrightarrow H_1 : H\beta \neq d$基于$T_i^{\star}$，$i = 1,2,3$的广义$p$值检验功效的模拟结果，记$b = (H\beta - d)'(H\beta - d)$作为$H\beta$与$d$之间偏离程度的一个度量。表二给出了基于$\tilde{T}_i$，$i = 1,2,3$构造$H\beta$的广义置信域对其真值覆盖率的模拟结果。模拟中取$H = (1,1,1)$，$\beta = (1,2,1)'$，设计阵$X$随机产生。

由表1的结果可以看出，本文构造的三个检验的功效均为$(H\beta - d)'(H\beta - d)$的增函数，其中第一个在控制犯第一类错误概率和功效增长方面都明显优于另外两个。表2可看出本文所构造的置信区域基本上包含了大部分的真实参数，但从稳定性及和置信水平相比较来看第一个优于其它两个。因此，本文在获得的三个精确检验和置信区域的基础上，通过模拟分别推荐使用第一个检验和第一个置信区域。

表1: 基于$T_i^{\star}$的广义p值检验功效($N = 6,\ T = 5,\ \sigma_\lambda^2 = 2,\ \sigma_\epsilon^2 = 1,\ \alpha = 0.05$)

σ_μ^2	tests	$b = 0$	$b = 0.25$	$b = 0.64$	$b = 1$	$b = 1.44$	$b = 4$
0.1	$T_1^{\star}$	0.0590	0.1500	0.5900	0.8680	0.9840	1
	$T_2^{\star}$	0.0300	0.0340	0.0500	0.0700	0.0880	0.1400
	$T_3^{\star}$	0.0400	0.0440	0.0480	0.0520	0.0500	0.1100
0.2	$T_1^{\star}$	0.0590	0.1600	0.6020	0.8880	0.9800	1
	$T_2^{\star}$	0.0220	0.0300	0.0560	0.0600	0.0700	0.1180
	$T_3^{\star}$	0.0460	0.0420	0.0440	0.0460	0.0600	0.1070
0.5	$T_1^{\star}$	0.0480	0.1580	0.6200	0.8820	0.9800	1
	$T_2^{\star}$	0.0320	0.0340	0.0500	0.0500	0.0460	0.1060
	$T_3^{\star}$	0.0480	0.0520	0.0540	0.0540	0.0660	0.1063
1	$T_1^{\star}$	0.0500	0.1550	0.6000	0.8800	0.9862	1
	$T_2^{\star}$	0.0213	0.0262	0.0275	0.0400	0.0450	0.1063
	$T_3^{\star}$	0.0488	0.0550	0.0563	0.0600	0.0612	0.2620

表2: $H\beta$的置信区域覆盖率 ($N=T=5$, $\sigma_\lambda^2=\sigma_\varepsilon^2=1$, $1-\alpha=0.90$)

	$\sigma_\mu^2=1$	$\sigma_\mu^2=2$	$\sigma_\mu^2=3$	$\sigma_\mu^2=4$	$\sigma_\mu^2=5$	$\sigma_\mu^2=6$
$\tilde{T}_1$	0.9455	0.9089	0.9616	0.9063	0.9505	0.8209
$\tilde{T}_2$	0.4036	0.8326	0.9674	0.1011	0.3424	0.7564
$\tilde{T}_3$	0.6400	0.8811	0.8032	0.9116	0.2400	0.6621

上述结果的具体模拟方法

表1：

第一步随机产生1000个$T_i^\star$的观测值，统计其中大于0的比例，此比例即为广义p值；

第二步重复第一步1000次，对给定水平α统计小于α的p值比例，此比例为拒绝原假设的比例，即功效。

表2：

第一步从$\tilde{T}_i$的分布产生1000个的观测值，由模型出发计算$\tilde{t}_i$，若$\tilde{t}_i$介于$\tilde{T}_i$的$\frac{\alpha}{2}$与$1-\frac{\alpha}{2}$分位数之间，记由$\tilde{T}_i$构造的广义置信域覆盖真值一次；

第二步重复第一步1000次，统计覆盖比例。

参考文献：

[1] Rao J N K, Sutradhar B C, Yue K. Generalized least squares F-test in regression analysis with two-stage cluster samples[J]. Journal of the American Statistical Association, 1993, 88: 1388-1391

[2] Wu C F, Holt D, Halmes D J. The effect of two-stage sampling on F statistics[J]. Journal of the American Statistical Association, 1988, 83: 150-159

[3] Wang S G, Liski E P. Small sample properties of the two-way error component regression[J]. ACTA Mathematica Application Sinica, 1999, 3: 287-296

[4] Wang S G, Ma W Q. On exact tests of linear hypothesis in linear models with nested error structure[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2002, 106: 225-233

[5] Tusi K W, Weerahandi S. Generalized p value in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters[J]. Journal of the American Statistical Association, 1989, 84: 602-607

[6] Weerahandi S. Generalized confidence intervals[J]. Journal of the American Statistical Association, 1993, 88: 899-905

[7] Weerihandi S. Testing variance components in mixed models with generalized p values[J]. Journal of the American Statistical Association, 1991, 86: 151-153

[8] Zhou L P, Mathew T. Some tests for variance components using generalized p values models[J]. Technometrics, 1994, 36: 394-402

[9] Weerahandi S, Berger V W. Exact inference for growth curves with intraclass correlation structure[J]. Biometrics, 1999, 55: 921-924

[10] Chi E M, Weerahandi S. Comparing treatments under growth curve models: exact tests using generalized p values[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1998, 71: 179-189

[11] Lin S H, Lee J C. Exact tests in simple growth curve models and one-way ANOVA with equicorrelation structure[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2003, 84: 351-368

[12] Ye R D, Wang S G. Generalized p values and generalized confidences intervals for variance components in general random effects model with balanced data[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2007, 20: 572-584

[13] Weerahandi S. ANOVA under unequal error variances[J]. Biometrics, 1995, 51: 289-299

[14] Krishnamoorthy K, Mathew T. Inference on the means of lognormal distributions using generalized p values and generalized confidence intervals[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2003, 115: 103-121

[15] 李新民，徐兴忠，李国英. 广义p值的Fiducial推断[J]. 中国科学(A辑)，2007, 6: 95-103

[16] Tang S J, Tusi K W. Distributional properties for the generalized p value for Behrens-Fisher problem[J]. Statistics & Probability Letters, 2007, 77(1): 1-8

[17] 王松桂，史建红，尹素菊等. 线性模型引论 [M]. 北京：科学出版社，2004

Generalized p Value Test for Regression Coefficients in Panel Data Model

CHENG Jing[1,2], WANG Song-gui[3], YUE Rong-xian[1]

(1- College of Mathematics and Sciences, Shanghai Normal University, Shanghai 200234;
2- Department of Mathematics, Chaohu College, Chaohu 238000;
3- College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100022)

Abstract: Some new exact tests and confidence regions of regression coefficients in the Panel data model with three random effects are established by using the concepts of generalized p value and generalized confidence interval. Invariance of these exact tests and confidence regions under the scale transformation are also discussed in the paper. The powers of these tests and coverage probabilities of these confidence regions are obtained through numerical simulations.

Keywords: Panel data model; random effect; generalized p value; generalized confidence region; regression coefficient